Matematické vety ako pravidlá I.

Róbert Maco
Univerzita Komenského, Bratislava, SK

MACO, R.: Mathematical Propositions as Rules I.
Philosophica Critica, vol. 5, 2019, no. 2, ISSN 1339-8970, pp. 2-20

The main aim of this paper is to convince the reader that in philosophizing about mathematics, the least misleading and most productive way of understanding mathematics is the so called normative conception; i. e. the way of conceiving mathematical propositions as rules and not as descriptive sentences. This approach has been inspired by the works of later L. Wittgenstein. I attempt to reach the outlined objective in two steps. In the first step, I will focus on how mathematics actually becomes a philosophical problem. The second step will consist in introducing a normative understanding of mathematics, and in particular its core: the normative account of mathematical propositions. I will try to answer the question of what it means to understand mathematical propositions as rules and I will emphasize the naturalness and productivity of this understanding. The forthcoming second part of the paper will contain responses to several standard objections to the normative conception of mathematics.

Key words: Mathematics – Philosophy of Mathematics – Mathematical Proposition – Rules – Description – Wittgenstein

Hlavným cieľom tohto článku je presvedčiť čitateľa, že pri filozofovaní o matematike je najmenej zavádzajúcim a zároveň najproduktívnejším spôsobom chápania matematických viet normatívne chápanie, t. j. taký spôsob, keď na ne nahliadame ako na pravidlá, a nie ako na deskriptívne vety[1]. Tento prístup je inšpirovaný prácami neskoršieho L. Wittgensteina.[2]

[1] Táto stať predstavuje prvý diel obsiahlejšieho textu o normatívnom chápaní matematiky. Druhý diel, ktorý bude venovaný najmä možným kritikám normatívnej prístupu je plánovaný na uverejnenie v nasledujúcom čísle.

[2] Wittgensteinove poznámky o matematike sú roztrúsené v celom jeho zachovanom diele. Nakoniec, viac než polovica všetkých jeho poznámok v rokoch 1929 – 1944 je venovaných práve filozofickým úvahám o matematike (pozri napr. Rodych 2011). Z hľadiska tejto práce však treba vyzdvihnúť predovšetkým dva zdrojové texty: *Witt-*

Hoci sa domnievam, že myšlienky vyjadrené v tomto texte sa buď úplne zhodujú s tým, čo si o danej problematike myslel Wittgenstein, alebo sa od jeho chápania odkláňajú len v niektorých nie veľmi významných detailoch, táto práca si nekladie za cieľ obhajovať istú interpretáciu Wittgensteina. Zámerom je skôr vecné riešenie istého súboru problémov, resp. navrhnutie a obhajoba istého prístupu k riešeniu týchto problémov, a nie exegéza textov, či už wittgensteinovských alebo iných.[3]

Čo myslím tým, keď hovorím, že vyššie uvedený prístup je najmenej zavádzajúci? Každý filozofický prístup k matematike má tendenciu zdôrazňovať isté aspekty matematiky a iné marginalizovať[4], pričom v tých prvých následne vidí „podstatu" matematiky, zatiaľ čo tie druhé vníma ako jej viac-menej akcidentálne charakteristiky. Pri každom takomto prístupe hrozí riziko, že zdôrazňovanie jedného aspektu povedie k deformovanému pohľadu na matematiku, alebo prinajmenšom, že nás zapletie do riešenia zlých (umelých) filozofických otázok. Z tohto hľadiska by bol najlepší taký filozofický spôsob uvažovania o matematike, ktorý by nás čo najviac odvádzal od kladenia si zlých filozofických otázok, resp. mal by v sebe takpovediac zabudované také mechanizmy, ktoré by nás upozorňovali na nebezpečné miesta a ponúkali by aj vysvetlenie, prečo sú nebezpečné.

Každý filozofický prístup k matematike musí vyzdvihovať istý aspekt (alebo súbor aspektov) matematiky v protiklade k iným aspektom. Preto je pochopiteľné, že každá filozofia matematiky je náchylná k tomu, aby

gensteinove prednášky o základoch matematiky, ktoré sú zostavené z podrobných poznámok štyroch jeho študentov, ktoré si robili počas Wittgensteinovho kurzu v roku 1939 (Wittgenstein 1979), a *Poznámky o základoch matematiky* (prvýkrát publikované v 1956), ktoré vznikli výberom editorov wittgensteinovského opusu, a ktoré zahŕňajú predovšetkým poznámky z rokov 1937 – 1944 (Wittgenstein 1984).

3 O Wittgensteinovej filozofii matematiky bolo za posledných 30 rokov napísaných niekoľko výborných kníh a viacero skvelých článkov. Tento môj text sa na mnohých miestach zásadným spôsobom opiera o ich analýzy a postrehy. Ako je uvedené v hlavnom texte, táto práca nie je venovaná porovnávaniu a komentovaniu rôznych interpretácií, preto na tomto mieste len vymenujem autorov, ktorých práce sa budú najciteľnejšie ukazovať v nasledujúcich stránkach, a ktorým týmto zároveň vyjadrujem vďaku za potešenie z čítania ich textov: Robert Fogelin, Pieranna Garavaso, Steve Gerrard, Esther Ramharter, Stuart Shanker, Friedrich Waismann, Victor Rodych, Mark Steiner, Felix Mühlhölzer, Sorin Bangu, Severin Schroeder, Ryan Dawson, Simon Friederich. Zároveň chcem poďakovať Marekovi Mikušiakovi a Tomášovi Čanovi, ktorí ma v diskusiách na túto tému zásobovali hojným počtom kritických poznámok a podnetných otázok.

4 Či dokonca – v extrémnejších prípadoch – popierať tieto aspekty, t. j. upierať im status matematickosti, vylučovať tie typy myšlienok, ktoré sa vyznačujú týmito charakteristikami z oblasti „skutočnej" (pravej, legitímnej) matematiky. Typickým príkladom sú tí intuicionisti, ktorí pokladajú určité časti klasickej matematiky za číre špekulácie, alebo skôr za metafyziku než za vedeckú matematiku.

okrem zaujímavých filozofických postrehov a analýz generovala aj nejaké zlé otázky, prinajmenšom z toho dôvodu, že vždy existuje istá tendencia k absolutizácii vybraného aspektu. Takéto riziko, samozrejme, hrozí aj normatívnemu chápaniu. Budem sa však usilovať ukázať, že toto riziko je podstatne menšie než pri iných filozofických prístupoch.

Čo to znamená, že istý filozofický prístup k matematike je produktívnejší než iný? Určitá filozofia matematiky môže byť produktívna vo viacerých ohľadoch. Pomenujem aspoň tri z nich: matematický, filozofický a didaktický. Určitý filozofický prístup k matematike môže byť *matematicky* produktívny v tom zmysle, že podporuje rozvíjanie matematiky samej, a to buď tak, že podnecuje k vzniku nových matematických pojmov a poznatkov, alebo tak, že vedie k „prečisťovaniu" už existujúcich pojmov a poznatkov. *Filozoficky* produktívny je filozofický prístup k matematike vtedy, keď vrhá nejaké nové svetlo na fungovanie matematiky a zaujímavým spôsobom nám umožňuje porozumieť jej miestu v rámci nielen iných intelektuálnych činností ale aj v rámci celkovej kultúry. Za *didakticky* produktívny by som zasa pokladal taký filozofický prístup k matematike, na základe ktorého možno matematiku viac alebo hlbším spôsobom otvoriť a sprístupniť aj tým ľuďom, ktorí do nej dovtedy neboli zaangažovaní.

Je dobré uvedomiť si, že tieto tri typy produktivity zďaleka nemusia ísť ruka v ruke. V téze, ktorú sa snažím obhájiť, mám na mysli predovšetkým produktivitu vo *filozofickom* zmysle. Moje tvrdenie teda presnejšie znie, že normatívne chápanie matematiky je produktívnejšie než ostatné filozofické koncepcie v tom, že nám lepšie umožňuje porozumieť reálnemu fungovaniu matematiky ako istého typu činnosti a lepšie nám dovoľuje pochopiť miesto matematiky v rámci ostatných intelektuálnych i neintelektuálnych činností.

K načrtnutému cieľu by som chcel dospieť prostredníctvom troch krokov, ktoré rozčlenia tento text na tri hlavné časti. V *prvej* časti sa budem venovať tomu, ako sa vlastne z matematiky stáva filozofický problém. Táto úvodná časť je dôležitá preto, lebo pre moju argumentáciu bude kľúčové ukázať, že niektoré typy otázok, ktoré významne zamestnávajú filozofov matematiky, a ktorých „ne-vyhnutnosť" sa často pokladá za dôvod, prečo normatívne chápanie matematiky nemôže byť dostatočné, nie sú až také nevyhnutné, ako sa často prezentujú. Ak by sa ukázalo, že tieto otázky sú skôr dôsledkom istých nedorozumení alebo dezinterpretácií, bola by to voda na mlyn normatívnemu chápaniu. *Druhá* časť bude venovaná predstaveniu normatívneho chápania matematiky, a osobitne jeho jadra: normatívneho chápania matematických viet. Pokúsim sa podať presnejšiu odpoveď na otázku, čo to znamená chápať matematické vety ako pravidlá a zdôrazním prirodzenosť a produktívnosť tohto chápania. V *tretej* časti (ktorá bude uverejnená v nasledujúcom čísle) dodám niekoľko spresňujúcich poznámok k normatívnemu chápaniu matematiky a následne zodpoviem najdôležitejšie štandardné námietky voči normatívnemu chápaniu matematiky.

Od matematiky k filozofii matematiky

V tejto časti by som chcel odpovedať na otázku, ako vyzerá tradičná cesta od matematiky k *filozofickému* zaoberaniu sa matematikou, t. j. k nastoľovaniu a riešeniu filozofických problémov matematiky. Jedným z cieľov tejto mojej stratégie je vytvorenie si určitého odstupu od „klasických" alebo „tradičných" filozofických problémov, ktoré sa za stáročia nahromadili okolo matematiky. Odstup tu nemá znamenať nezáujem, ale má nám skôr umožniť zaujatie takého postoja, z ktorého budeme mať lepší výhľad na genézu filozofických problémov, ako sú obvykle prezentované vo filozofii matematiky, a ktorý nám umožní prípadne prehodnotiť isté zabehané schémy uvažovania.

Položme si teda prostú otázku: Ako sa vlastne dostávame k filozofickej tematizácii matematiky? Prečo by mala byť matematika pre nás nejakou filozofickou výzvou? Predstavme si seba samých v koži človeka, ktorý čoto o matematike vie, no ktorý si doposiaľ žiadne filozofické otázky v súvislosti s ňou nekládol. Jednou cestou ako ho uviesť do filozofie matematiky by bolo, odporučiť mu prečítanie si nejakého dobrého úvodu do filozofie matematiky. Predpokladáme totiž, že diela tohto typu nám v prvom rade majú poskytnúť dostatok motivácie pre zaoberanie sa danou činnosťou. Ak sa teraz porozhliadneme po rôznych úvodoch do filozofie matematiky, ktoré boli publikované povedzme za posledných 20 rokov, zistíme, že napriek mnohým rozdielom v didaktickom prístupe a vo výbere preberanej látky tieto práce sa veľmi zhodujú v základnej motivačnej stratégii. Ako príklad si vyberiem jeden z takýchto úvodov a stručne predstavím, ako v ňom prebieha tento iniciačný akt. To by nám malo poskytnúť potrebný materiál na nasledujúce premýšľanie o povahe filozofických otázok týkajúcich sa matematiky.

No ešte predtým, než sa pustím do tejto úlohy, chcel by som krátko zareagovať na možnú výhradu voči takémuto postupu a voči očakávaniam, ktoré do neho vkladám. Námietka by mohla znieť takto: Ak má tento úvod predstavovať dôležitú súčasť obhajoby istej filozofickej pozície ohľadom matematiky, nemal by som čerpať materiál pre nasledujúcu kritiku skôr z kľúčových odborných diel venovaných filozofii matematiky, a nie z úvodov určených študentom a iným začiatočníkom v tejto disciplíne?

Samozrejme, pokiaľ ide o to, podrobiť kritike nejakú konkrétnu verziu filozofie matematiky (Fregeho logicizmus, Brouwerov intuicionizmus, Shapirov štrukturalizmus a pod.), určite by nestačilo, ak by som sa obmedzil len na „učebnicovú“ verziu týchto koncepcií, keďže je prirodzené, že v dielach typu úvodov nemôžu byť už len z priestorových dôvodov vyložené dané koncepcie dostatočne detailne. V mojom prípade však nepôjde ani tak o kritiku jednotlivých (personifikovaných) koncepcií, ale v prvom kroku je mojím cieľom poukázať na isté spoločné zázemie, z ktorého potom rôzne také koncepcie vychádzajú, a na ktorom budujú svoje konkrétne teoretické riešenia. Mnohé z týchto riešení sú, samozrejme, vysoko sofistikované a náročné po technickej stránke, no ich spoločným koreňovým systémom je istý zdieľaný súbor problémov a otázok, ktoré sa (viac-menej) všeobecne pokladajú za dôležité, zaujímavé a neľahko riešiteľné, takže – stručne povedané – za hodné filozofickej pozornosti. Z hľadiska môjho zámeru v tomto texte je veľmi dôležité uvedomiť si, ako prebieha už toto prvotné nastavenie našej filozofickej pozornosti, na aké základné problémy a záhady sa upriamuje pozornosť a aké typy otázok sa predkladajú ako úlohy pre ďalšie špecializovanejšie filozofické zaoberanie sa matematikou. Ak by sa totiž ukázalo, že už pri tomto prvotnom „nastavení“ sa deje niečo, čo napriek svojej značnej sugestívnosti má za následok, že naše skúmania sa začnú uberať smerom riešenia umelých problémov, bolo by dobré nasadiť nástroje kritickej analýzy už v tomto počiatočnom bode. Okrem toho – a to je moja druhá odpoveď na spomenutú námietku – netreba zabúdať na to, že učebnice a úvody do danej problematiky píšu často ľudia, ktorí sú pokladaní vo svojom odbore nielen za významných odborníkov, ale aj produktívnych prispievateľov k danému odboru. A to určite platí aj o takom odbore ako je filozofia matematiky. Ak si teda vyberieme ako príklady vhodné úvodné diela, nemôže nám nikto vyčítať, že daná práca sa nachádza mimo profesionálnej filozofie matematiky.

Dielo, ktoré som si vybral ako vhodného reprezentanta rôznych úvodov do filozofie matematiky je *Philosophies of Mathematics* od D. Vellemana a A. Georgea z roku 2002[5]. Pozrime sa teda bližšie, akou taktikou sa títo autori snažia vtiahnuť čitateľa do problematiky filozofie matematiky. Ich postup je, ako už bolo vyššie avizované, v základných krokoch veľmi podobný postupom iných autorov.

V prvom kroku prezentujú niekoľko matematických viet spolu s ich obvyklými dôkazmi. Samozrejme, keďže v tejto fáze sa nepredpokladá, že

5 Toto dielo predstavuje – podľa mojej mienky – jeden z najlepších úvodov do tradičnej filozofie matematiky, ktoré sú momentálne k dispozícii. Moja nespokojnosť s jeho niektorými aspektmi, ktorá sa prejaví v nasledujúcich riadkoch, by nemala zatieniť iné výrazné kvality tejto knihy.

čitateľ má sofistikované matematické znalosti a keďže je naporúdzi len obmedzený priestor, príklady musia byť relatívne krátke, dôkazy musia byť prehľadné a pochopiteľné aj bez vedomostí z vyššej matematiky. Na druhej strane, je tu snaha uviesť príklady, ktoré sú v nejakom zmysle vzorové, alebo ktoré predstavujú „klasické“ matematické hádanky a ich riešenia. V prípade knihy, ktorú sme si zvolili, autori predstavujú dôkazy troch viet. Prvý je dôkaz sporom, že je iracionálne číslo, druhým je existenčný (nekonštruktívny) dôkaz, že existujú dve také iracionálne čísla a, b, že ab je racionálne číslo, a tretím je dôkaz pomocou matematickej indukcie, že súčet prvých n prirodzených čísel je $n(n + 1)/2$, teda $1 + 2 + ... + n = n(n + 1)/2$.

Po tejto čisto matematickej pasáži prichádza filozofický komentár a práve tu by sme mali zbystriť pozornosť. Autori nám začínajú klásť isté rétorické otázky, v ktorých sú obsiahnuté pojmy a implicitné presupozície, o ktorých autori zjavne očakávajú, že čitateľ ich bude nielen chápať, ale že sa mu budú zdať v danom kontexte ako celkom prirodzené. Napr. hneď na začiatku poukazujú na to, že čitateľ, ktorý predtým uvedené vety a ich dôkazy nepoznal, bude po prečítaní (a pochopení) úvodnej pasáže bohatší o tri nové *pravdy*. Jeho *poznanie* sa teda rozšírilo, čo nás vedie k otázke, *ako* vlastne tieto nové poznatky *nadobudol*. Okamžite pritom odmietajú odpoveď, že by toto poznanie mohlo vďačiť za svoj pôvod *pozorovaniu*. Pozeranie sa na papier popísaný matematickými symbolmi nie je predsa nevyhnutnou podmienkou získania spomenutého poznania, pretože čitateľ predsa mohol byť natoľko bystrý, že mohol na tieto tri poznatky prísť aj sám vo svojej vlastnej hlave.

Hneď v ďalšom odseku autori zavádzajú tradičné pojmové rozlíšenie medzi apriórnym a aposteriórnym poznaním – to prvé na rozdiel od toho druhého pre svoje zdôvodnenie nevyžaduje zmyslovú skúsenosť. Na základe našich prvých úvah (pokračujú autori) sa zdá, že uvedené tri poznatky skôr patria na stranu apriórneho poznania (dokonca aj vtedy, ak vezmeme do úvahy, že nejaké vnemy pri nich môžu, či dokonca musia plniť aspoň pomocnú úlohu). Tento záver však nie je v súlade s empirizmom, ktorý trvá na tom, že všetko poznanie je v konečnom dôsledku založené na zmyslovej skúsenosti – čo sa môže zdať ako rozumné východisko, ak si uvedomíme, že naše kontakty so svetom a naše poznanie o ňom je sprostredkované našimi zmyslami. Ak však aj naďalej nie sme ochotní odvodzovať naše práve získané matematické poznatky zo zmyslových vnemov, môžeme sa pokúsiť ospravedlniť naše naliehanie na apriórnom poznaní tým, že poprieme, že naše tri poznatky sa týkajú zmyslovo vnímateľného sveta – možno sa naše poznanie vzťahuje na nejaký iný svet, odlišujúci sa od „prírodného sveta“

tým, že nie je ani priestorový ani časový, no ktorý tiež existuje nezávisle od nás ako poznávajúcich subjektov, podobne ako hory, planéty a galaxie existujú nezávisle od nás (nie je to teda len nejaký výtvor individuálnej či kolektívnej imaginácie). Tu sa k slovu dostáva ďalší *terminus technicus* modernej filozofie matematiky: *platonizmus*. A, samozrejme, platonizmus sám prichádza vo viacerých variantoch: podľa toho, čo presne umiestňuje do „platónskej ríše“: samotné matematické objekty alebo skôr matematické pravdy (prípadne oboje). Skôr než sa však začne začiatočník vo filozofii matematiky tešiť z toho, že problém povahy matematického poznania je úspešne vyriešený, autori prichádzajú so štandardnou spochybňujúcou námietkou, ktorá, zdá sa, všetko opäť uvrháva do tmy: Ak sú matematické objekty (alebo pravdy) mimo času a priestoru a navyše kauzálne inertné, ako si vysvetliť, že o nich vôbec môžeme niečo vedieť? Aký máme k nim prístup? A ak by sme aj azda chceli túto otázku zodpovedať tým, že by sme sa odvolali na rozum (intelekt, racionálnu intuíciu a pod.), ako na osobitý „orgán“, ktorý nám ich sprostredkuje, stále by ešte zostala nevyriešená záhada, ako je možné, že matematika je tak dobre *aplikovateľná* na tento *fyzický* svet. Neodmietli sme náhodou empirizmus prirýchlo, nemali by sme sa predsa len k nemu pokorne vrátiť, aj keď možno v nejakej prešpekulovanejšej podobe?

Ďalej už autorov knihy *Philosophies of Mathematics* nebudem podrobne sledovať. Toto resumé ich úvodných pasáží ukončím citátom, ktorý dobre dokumentuje, čo títo autori pokladajú na matematike za hodné filozofickej pozornosti, t. j. ktoré záhady by mala dobrá filozofia matematiky osvetliť: „Zdá sa teda, že matematika je disciplína, prostredníctvom ktorej získavame poznanie o nekonečne mnohých entitách, s ktorými nemôžeme nijako kauzálne interagovať, a že toto poznanie nadobúdame pomocou konečných inferencií, ktoré neobsahujú empirické premisy a ich závery plynú s nevyhnutnosťou“ (Velleman – George, 2002, 12).

Zatiaľ čo na úplnom začiatku svojho Úvodu sa autori usilovali vcítiť do roly začiatočníka a kládli si pochybovačnú otázku, prečo sa vlastne filozofi zaoberajú matematikou („čo už len je na matematike také filozoficky zaujímavé?“), v tomto bode sa cítia byť natoľko istí svojím predchádzajúcim dialektickým výkladom, že zrazu vyjadrujú naopak neskrývaný údiv nad tými, ktorí by si po tomto všetkom vedeli pri strete s matematikou zachovať filozofický pokoj.

Zdá sa teda, že prvotná úloha bola splnená (aspoň súdiac podľa prejavov autorov): čitateľ dostal hojnú dávku dôvodov, pre ktoré by sa mu mala javiť matematika ako záhadná záležitosť, priam vyzývajúca k získaniu nejakého lepšieho filozofického porozumenia.

Samozrejme, netreba prehliadať, že autori sa na tomto mieste k ničomu z doposiaľ povedaného nezaväzujú. Treba si všimnúť, že posledný citát začínal slovami „zdá sa“. Autori tu teda neobhajujú ani tézu, že matematické objekty existujú mimo času a priestoru, ani to, že s nimi nemôžeme kauzálne interagovať, ani to, že majú povahu nevyhnutných právd atď. Sformulovať podrobnejšie filozofické tézy a teórie na tieto témy a obhájiť ich voči súperiacim koncepciám, to je úloha pre neskoršie skúmanie (a autori ukazujú jej plnenie v prípade troch veľkých filozofických koncepcií matematiky začiatku 20. storočia – logicizmu, finitizmu, intuicionizmu – v ďalších kapitolách svojej knihy). S ohľadom na náš cieľ je však pre nás zaujímavejšie všímať si – obrazne povedané – aké pódium autori svojim doterajším výkladom postavili, než sledovať jednotlivé konkrétne výjavy, ktoré sa následne budú odohrávať na tomto pódiu, ktoré už bude brané ako prirodzené pozadie pre jednotlivé herecké výkony.

Zrekapitulujme si teda kulisy, ktoré autori pri svojom výklade používali, a to predovšetkým tie, ktoré fungovali ako skôr „operatívne“ než explicitne tematizované pojmy. Všimnime si predovšetkým, že od samého začiatku (t. j. hneď po predstavení troch spomenutých dôkazov) naši autori s úplnou samozrejmosťou používali pri hovorení o matematike výrazy ako „pravdy“ a „poznanie“. Napr. konštatovali, že po preštudovaní si dôkazov sme bohatší o tri pravdy, získali sme teda poznanie (o ktorom sa následne môžeme pýtať, aký je jeho pôvod/zdroj/prameň). Ak by si naši autori mysleli, že začiatočník, ktorý bude čítať ich knihu, by mohol byť prekvapený alebo zmätený z toho, že sa v tomto kontexte používajú také termíny ako „pravdy“ a „poznanie“, určite by nezabudli dodať vysvetľujúcu poznámku o tom, prečo takéto termíny použili, resp. v akom presnom zmysle ich použili. Urobili by teda niečo podobné ako o odsek nižšie, keď začali používať termíny „apriórny“ a „aposteriórny“.

Prečo to však vôbec spomínam? Chcel som azda kritizovať našich autorov za to, že použili neadekvátne slová alebo že dostatočne nevysvetlili význam slov, ktoré použili? Mohlo by sa predsa zdať, že hovoriť takto o matematike, komentovať takto to, čo sa udialo s chápavým čitateľom po prečítaní si troch dôkazov, je úplne legitímne, pretože je to bežne používaný spôsob hovorenia, ktorému každý rozumie. S touto poslednou tézou sa dá súhlasiť – naozaj aj z pohľadu celkom bežného jazyka nie je nič neobvyklé hovoriť o matematických poznatkoch či pravdách. V tomto ohľade nemám žiadnu ambíciu meniť bežný jazykový úzus.

Predsa je tu však jedno potenciálne nebezpečenstvo. Problémom tu nie je bežný jazykový úzus, pretože naše každodenné (nefilozofické) hovorenie o matematických „pravdách“ či „poznatkoch“ má práve tú povahu, že sa z neho bežne (mimo filozofických kontextov) nevyvodzujú žiadne ďalšie „nekaždodenné“ tvrdenia, ani sa nestáva podnetom k formulovaniu filozofických otázok či filozofického údivu nad nejakými záhadami. Slová ako „pravdy“ a „poznanie“ môžu v bežných nefilozofických kontextoch dobre fungovať aj ďalej, a aj ďalej fungovať budú. Svoju pozornosť však musíme zbystriť vtedy, keď vieme, že sa pohybujeme v teréne filozofie, resp. keď reflektujeme stratégie a taktiky, ktorými sa nás autori snažia „namočiť“ do filozofie, t. j. vyprodukovať pred nami nejakú záhadu, poukázať na doteraz nepovšimnutý, no závažný problém, odhaliť skrytý paradox v našom myslení a pod.

Ale – mohli by ste namietnuť – nie sú také „veci“ ako to, že je iracionálne číslo, alebo to, že neexistuje najväčšie prvočíslo a pod. matematickými „pravdami“, resp. „poznatkami“? A ak sú, prečo okolo toho nakoniec robiť toľko kriku? Odpovedal by som takto: Slová ako „pravdy“ a „poznatky“ sa (bežne) používajú vo veľmi rôznych kontextoch, z ktorých niektoré sú „bežnejšie“ než iné (povedzme, už len čisto z hľadiska počtu výskytov). V bežnej komunikácii často nie je dôležité presnejšie si uvedomovať rozdiely medzi týmito kontextami, pretože pre splnenie komunikačnej funkcie v danom konkrétnom čase a priestore to nie je potrebné. Je to analogické prípadom, kedy napr. v bežnom živote vyslovíme smerom k niekomu naliehavú vetu „Odsuň tú stoličku“, ukazujúc na nejaké kreslo či fotelu. Vo víre danej situácie je to zrozumiteľný príkaz (alebo žiadosť), pri ktorej sa zväčša nikto nepozastaví nad tým, že nebol použitý ten najadekvátnejší výraz. A už vôbec nikto nezačne domýšľať konzekvencie takéhoto používania daného termínu z hľadiska našej celkovej nábytkovej pojmovej schémy. Pri filozofovaní však robíme práve *toto*. Je teda výsostne dôležité dávať pozor na to, akými slovami začíname a aké sú ich primárne (sémantické) „asociačné centrá“. Aby som bol konkrétny, slová ako „pravda“ a „poznatok“ sa v bežnom úze najčastejšie vzťahujú na veci, osoby, javy, procesy a udalosti každodenného života. Samozrejme, okrem toho sa niekedy hovorí aj o „životných pravdách“, o „morálnych pravdách“, o „Božích pravdách“ a pravdaže aj o „matematických pravdách“, „logických pravdách“, či „vedeckých pravdách“.

Už pri prvom zamyslení sa nad týmito rôznymi slovnými spojeniami nám bude zrejme jasné, že „pravda“ tu nebude znamenať presne to isté[6]. Povedať, že všetko sú to pravdy (t. j. že všetky patria do jednej a tej istej

[6] Zamyslime sa cvične napr. nad tým, aký pojem pravdy je použitý v tomto známom aforizme: „Veľká pravda je pravda, ktorej opak je tiež veľká pravda.“ Ako príklady si pri tom môžeme predstavovať napr. tieto dvojice výrokov: „Človek je vo svojej podstate dobrý – kazí ho až spoločnosť“ – „Človek je vo svojej podstate zlý – polepšuje ho až spoločnosť“; „Život je niečo krásne“ – „Život je niečo príšerné“.

veľkej množiny právd), ibaže každá má ešte nejakú kvalitu naviac (podobne ako žlté a červené jablká sú jablká, ibaže sa líšia farbou), by bolo podobné ako povedať, že rubínové a granátové jablká sú oboje jablká, len jedny sú rubínové a druhé granátové. Moje doterajšie poznámky, samozrejme, neposkytli žiadny nepriestrelný argument v prospech toho, že vo výraze „matematické pravdy" sa výraz „pravda" používa v diametrálne odlišnom význame než napr. v spojení „životné pravdy". Mojím bezprostredným cieľom bolo skôr upozorniť na to, že totožnosť významov by sme nemali brať hneď od začiatku ako niečo samozrejmé. A po druhé, chcel som vyzvať k tomu, aby sme si (pri filozofovaní) všímali, aké primárne asociácie sa s daným slovom spájajú, pretože tie budeme mať tendencie projektovať do takých slov ako „pravdy", keď pomocou nich budeme filozofovať, t. j. keď ich už nebudeme používať „v prúde bežného života", ale keď budeme teoreticky domýšľať rôzne sémantické konzekvencie.

Napríklad, len čo označíme vety ako tú o prvočíslach („Neexistuje najväčšie prvočíslo") ako „pravdy", budeme mať celkom prirodzene (pri filozofovaní!) tendenciu chápať túto vetu podľa modelu takých viet, ako napr. „V tejto miestnosti nie je nikto najvyšší". Máme pritom na mysli miestnosť, kde sa povedzme nachádza 5 rovnako vysokých ľudí. Podľa toho máme sklon (hoci by bol len podvedomý) predstavovať si prvočísla v akejsi „miestnosti" (v množine prvočísel) a prechádzajúc od jedného k ďalšiemu (podľa veľkosti) konštatovať, že to nasledujúce je väčšie než predchádzajúce a že takto by sme to mohli robiť donekonečna („keby sme mali k dispozícii toľko času"). Tí, ktorí majú ešte viac fantázie (alebo viery) si môže ešte predstavovať božskú bytosť, ktorá nahliada všetky tieto prvočísla v ich nekonečnej totalite, analogicky k tomu, ako my ľudia môžeme nahliadať jedným pohľadom a naraz totalitu štyroch bodiek na papieri. Dôležité však je, že aj bez dodania tejto teologickej predstavy, aj keď zostaneme pri predchádzajúcom čisto sekulárnom pohľade, to, čo dostávame, vyvoláva až akýsi závrat z nekonečna (a to aj keby išlo len o nekonečno potenciálne). Nie je to záhada nad všetky záhady, ako môžeme my, konečné bytosti, tušiť niečo o do nekonečna sa tiahnucich prvočíslach, ba nielen tušiť, ale môžeme to dokonca dokázať s absolútnou istotou a vo forme nevyhnutnej pravdy?

To, k čomu sme teraz takto dospeli, nie je nič iné než to, čo vyjadrili Velleman a George, keď sumarizovali svoj iniciačný výklad o filozofických záhadách matematiky. Obraz, ktorý sa nám týmto načrtáva pred očami určite vyvoláva údiv a dokonca možno aj istú bázeň: „predstavujeme si" všetky tie nesmierne nekonečná, ktoré skúma a opisuje matematik, pričom zároveň jeho tvrdenia nemajú v sebe nič z tej obvyklej vágnosti alebo rozostretosti, ktorá sa inak spája s rozľahlými priestormi, ktoré nedokážeme prehliadnuť. Naopak, matematika nielenže disponuje nekonečnami (nekonečnými množinami), ale zároveň dokáže v týchto a o týchto nekonečnách nachádzať exaktné pojmové určenia. Je to teda ríša, ktorá je nekonečne rozľahlá, no ktorá v sebe nemá nijakú neurčitosť alebo hmlu (iba ak tú, ktorá sa dá pripísať na vrub nášmu nedokonalému zraku).

Normatívne chápanie matematických viet

Existuje nejaký spôsob, ako sa vyhnúť tomu, aby sme sa zaplietli do riešenia umelých filozofických problémov okolo matematiky? V tejto časti sa budem usilovať ukázať, že takáto alternatíva naozaj je k dispozícii a že je ňou normatívne chápanie matematiky. Aby som sa hneď od začiatku vyhol istým nedorozumeniam, chcem povedať, že prijatie normatívneho chápania matematiky nemusí znamenať automatické riešenie všetkých problémov filozofie matematiky. Moja téza teda neznie tak, že len čo si osvojíme tento filozofický prístup k matematike, všetky dovtedajšie („tradičné“) problémy filozofie matematiky sa akoby švihnutím čarovného prútika rozplynú. Alebo že sa všetky rozpustia v tom zmysle, že sa ukážu ako v striktnom zmysle nezmyselné. Moja téza bude skôr taká, že zaujatie daného postoja nám umožní produktívnejšie vyrovnávanie sa s filozofickými problémami, ktoré vznikajú (a s veľkou pravdepodobnosťou aj v budúcnosti budú vznikať) v súvislosti s matematikou. Samozrejme, očakávam, že mnohé tradičné problémy (otázky) stratia svoj zmysel v tej podobe, v akej sa ich snažili riešiť (zodpovedať) mnohí filozofi a filozofujúci matematici doposiaľ. No i pri týchto je dosť pravdepodobné, že nezmiznú úplne, ale že nadobudnú novú (pre ich riešenie) produktívnejšiu podobu.

Niekto by tu mohol však namietnuť, že ide o verbálny trik: ak dané problémy (otázky) preformulujeme do nejakej novej podoby a v tomto zmysle zmeníme ich význam (ich zmysel), potom už nemožno hovoriť, že aj naďalej riešime tie isté otázky, ibaže v zmenenej podobe, pretože – striktne vzaté – ide už o *iné* problémy (otázky).

S touto pripomienkou sa dá súhlasiť, no zároveň by som chcel trvať na tom, že predchádzajúci spôsob vyjadrovania sa má svoju legitimitu v tom, že tie nové, iné, problémy (otázky) sú úzko prepojené s otázkami, ktoré nahradili. Okrem iného, to, čo ich s nimi spája, je určitý zmätok alebo určitá nejasnosť, ktorú pociťujeme pri premýšľaní o istých aspektoch matematiky. Tento zmätok či túto nejasnosť by sme chceli odstrániť. Zatiaľ čo predtým sme si mysleli, že sa nám to podarí napr. tým, že zodpovieme „tradičnú“ otázku o tom, ako presne vyzerá vzťah medzi ríšou temporálnych a atemporálnych objektov, teraz si pre zmenu myslíme, že sa nám to podarí tým, že si zodpovieme inak formulovanú otázku, napr. otázku, aký účel plnia v istých našich jazykových hrách určité typy výrazov.

Aby som ešte názornejšie priblížil spôsob, akým nám prijatie normatívneho chápania má pomôcť, chcem použiť nasledujúcu analógiu z bežného života. Predstavme si situáciu, že sa v našom okolí trvalo vyskytuje nejaká osoba spôsobujúca vážne problémy ľuďom naokolo (napr. nebezpečný sused). Jeden spôsob riešenia danej situácie je vyhýbať sa, pokiaľ je to len možné, dotyčnej osobe, odporúčať ostatným, aby sa jej tiež vyhýbali, a v prípade konfliktov, ktorým sa nebolo možné vyhnúť, zasiahnuť silou, zavolať políciu atď. To je v zásade stratégia „boja proti škodcovi". Iná stratégia, ktorá by si však vyžadovala zásadnú zmenu nazerania na dotyčnú osobu, by bola stratégia „pomoci postihnutému". To by mohlo znamenať nasadenie takých prostriedkov a vyvíjanie takých aktivít, ktoré by napr. danú osobu na rozdiel od zámernej izolácie viedli k postupnej integrácii s okolitým prostredím (k resocializácii). Základný cieľ je v oboch prípadoch rovnaký: odstrániť alebo aspoň podstatne znížiť riziko ublíženia na zdraví zainteresovaných osôb. V tomto zmysle môžeme povedať, že stále riešime ten istý problém, i keď naše nastavenie je podstatne odlišné. A, samozrejme, každý vie, že ťažkosti, s ktorými sa bude stretávať človek akceptujúci tento druhý postoj, môžu byť značné (aj keď možno práve takáto stratégia je efektívnejšia z hľadiska dosiahnutia základného cieľa).

To isté platí pre prijatie normatívneho prístupu k matematike. Nie je realistické očakávať, že problémy začnú odpadávať už len pri vyslovení tých správnych zaklínacích formuliek. Na začiatok nám bude úplne stačiť, ak naša nová strategická perspektíva prelomí neplodnú zacyklenosť predchádzajúcich prístupov a ak postupne preukáže v jednotlivých bodoch, že do problematiky prináša nové svetlo. Tak ako v spomenutom analogickom príklade, aj tu sa môže celkom ľahko ukázať, že nový prístup na nás bude klásť nové (predtým nepoznané a neočakávané) nároky, ktoré nemusia byť príjemné. Ak riešiteľ problému „nebezpečného suseda" prijme opísanú druhú perspektívu, môže to naňho klásť nový nárok v podobe sústavnej interakcie s problémovou osobou (spoločné trávenie času a pod.), zatiaľ čo v prvom prípade sa ich vzájomné kontakty mohli obmedzovať na iba občasné (hoci nepríjemné) fyzické strety. Analogicky, pri riešení problémov z pozície normatívneho chápania môžu vyvstať nové nároky na riešiteľa, napr. sa môže vyžadovať oveľa intenzívnejšia a systematickejšia pozornosť venovaná spôsobu používania jazykových prostriedkov a prísnejšie dbanie na to, ako o matematike hovoríme v prirodzenom jazyku, ako si v ňom „interpretujeme" svoju matematickú činnosť a produkty tejto činnosti. Takáto „povinnosť" nemusí byť úplne príjemná a pre niekoho môže byť vyslovene obťažujúca.

Prejdime teda k jadru veci. V čom presne spočíva „normatívne chápanie" matematiky? Tento prístup je inšpirovaný predovšetkým poznámkami neskoršieho L. Wittgensteina. V prvom rade ide o novú perspektívu, nový spôsob nahliadania na matematické vety. Wittgenstein vo svojich prácach tento svoj prístup charakterizuje tromi spôsobmi:

1. hovorí, že matematika je *normatívna*[7] (odtiaľ slovné spojenie *normatívne chápanie matematiky*),
2. hovorí, že matematické vety sú *gramatické* vety, a nie skúsenostné vety[8],
3. hovorí, že matematické vety sú *pravidlá opisu* (deskripcie), a nie deskriptívne vety.[9]

Jadro všetkých týchto vyjadrení je rovnaké, odlišnosť je len v použitých jazykových prostriedkoch a v dôraze na kontrast. V prvej formulácii nie je explicitne spomenuté, voči čomu sa normatívne chápanie vymedzuje. V druhej formulácii je normatívny prístup jednak už explicitne zameraný na chápanie matematických *viet*, a jednak sa tu pomenúva kontrast voči empirickému chápaniu (matematických viet). Tretia formulácia je opäť explicitne zameraná na matematické vety, no kontrast tu vystupuje v modifikovanej podobe. Všetky gramatické vety (vo Wittgensteinovom chápaní) sú pravidlami a všetky skúsenostné vety (vo Wittgensteinovom chápaní) sú deskriptívnymi vetami. No v tomto treťom bode sa dodáva, že ide o pravidlá *deskripcie* a toto chápanie matematických viet sa stavia do kontrastu s chápaním matematických viet ako takých, ktoré niečo *opisujú*. Táto modifikácia v istom ohľade adekvátnejšie vyjadruje to, čo chce Wittgenstein v tejto súvislosti povedať. Jeho normatívne chápanie matematiky, resp. matematických viet, totiž nemá byť alternatívou len k empiristickým filozofiám matematiky, ale rovnako tak aj k platonistickým (alebo platonizujúcim) filozofiám matematiky. Ba dokonca, možno ísť ešte ďalej: je to alternatíva aj k mentalistickým (napr. intuicionistickým) a k určitým formalistickým[10] (alebo nominalistickým) filozofiám matematiky. Je

[7] „To, čo hovorím, smeruje k tomu [kommt darauf hinaus], že matematika je *normatívna*. Ale ‚norma' neznamená to isté ako ‚ideál'" (Wittgenstein 1956/1984, 425).

[8] „Uvážme, že v matematike sa presviedčame o *gramatických* vetách; výrazom, výsledkom, tejto presvedčenosti je teda to, že *prijímame nejaké pravidlo*" (Wittgenstein 1956/1984, 162).
„Skúsenosť ma naučila, že tentokrát to vyšlo takto, že obvykle to vychádza takto; hovorí to však veta matematiky? Skúsenosť ma naučila, že som šiel touto cestou. Je *to* však matematický výrok? – Čo však hovorí? V akom vzťahu je k týmto skúsenostným vetám? Matematická veta má hodnosť [Würde] pravidla" (Wittgenstein 1956/1984, 98-99).

[9] „Kto pozná nejakú matematickú vetu, ešte *nič* nevie. T. j .‚matematická veta má poskytovať len rámec [Gerüst] pre nejaký opis" (Wittgenstein 1956/1984, 356).

[10] Toto sa týka iba jednej veľmi špecifickej – a tiež možno dodať „hrubej" – verzie formalizmu, ktorá v súčasnosti nie je, pokiaľ viem, nikým vážne zastávaná. S. Shapiro

to alternatíva ku všetkým týmto vymenovaným v tom zmysle, že odmieta jeden základný predpoklad, ktorý v nich všetkých významným spôsobom figuruje. Je to predpoklad, že matematika je v istom signifikantnom význame *o niečom*, a že pomenovať a teoreticky rozvinúť, čo toto „niečo" je, je práve úlohou filozofie matematiky.

Ak veci zjednodušíme do takej podoby, aby nám to umožnilo koncízne vyjadrenie, môžeme povedať, že každý z uvedených spôsobov filozofovania o matematike sa zameriava na svoj favorizovaný predmet, ktorý prezentuje ako *subject-matter* matematiky. Ide pritom o tieto voľby: príroda (fyzický svet), ríša abstraktných objektov („platónska ríša"), myseľ („mentálne produkty"), jazyk („jazykové entity"). Empiristi sa hlásia k názoru, že matematické vety v nejakom zmysle opisujú svet (možno najvšeobecnejšie a/alebo najabstraktnejšie aspekty sveta), platonisti trvajú na tom, že matematické vety sú o abstraktných (platónskych) objektoch a ich vzájomných vzťahoch rovnako, ako sú biologické vety o živých (organických) bytostiach, intuicionisti sa klonia k názoru, že matematické vety vypovedajú o mentálnych činnostiach, resp. produktoch matematizujúcej mysle (či už empirického alebo „ideálneho" matematika), a nakoniec formalisti vyhlasujú, že matematické vety sú v konečnom dôsledku o znakoch, že matematické objekty, o ktorých hovoríme, sú v nejakom zmysle totožné so znakmi (či už v zmysle *type* alebo *token*).

Je zjavné, ako sa z naznačených štyroch pozícií veľmi rýchlo dostaneme do neľahkých filozofických problémov. Na každom kroku tu na nás striehnu záhady: napr. nevyhnutnosť matematických viet (pre empiristov), epistemický prístup k predmetu matematiky (pre platonistov), objektivita/intersubjektivita matematiky (pre mentalistov), rozlíšenie *type*/*token* a aplikovateľnosť matematiky (pre formalistov). Samozrejme, všetky tieto ťažkosti pokladajú zástancovia uvedených prístupov skôr za výzvu než za principiálnu námietku voči ich koncepciám. Je to podnet k systematickejšiemu, detailnejšiemu a celkovo sofistikovanejšiemu rozvinutiu (či modifikácii) danej koncepcie. Na tejto platforme potom prebiehajú diskusie a polemiky medzi jednotlivými koncepciami, a aj vo vnútri jednotlivých koncepcií (napr. platonizujúci Frege chápe čísla ako objekty, presnejšie rozsahy pojmov, zatiaľ do platonizujúci Shapiro presadzuje názor, že aritmetika je o štruktúrach – a podobne by sa dali vymenovávať ďalšie varianty v jednotlivých prístupoch).

Wittgensteinov návrh naopak spočíva v tom, odobrať týmto diskusiám ich bazálnu pôdu pod nohami tým, že prijmeme chápanie, že vo „filozoficky

ju označuje ako „term formalism" a odlišuje ju od „game formalism", ktorý popiera, že by matematika mala nejaký *subject-matter* a že by obsahovala nejaké pravdivé tvrdenia.

signifikantnom" zmysle matematika nie je o ničom, t. j. matematické vety nemajú deskriptívnu povahu, nereprezentujú nijaké stavy vecí, ale matematické vety skôr stanovujú (a vyjadrujú) určité pravidlá, a to pravidlá používania rôznych typov znakov, ktoré následne zohrávajú (môžu zohrávať) úlohu pri opisovaní empirických stavov vecí, pri reprezentovaní (modelovaní) rozmanitých reálnych situácií. Ako pravidlá patria matematické vety na stranu toho, čím sa meria (meradla), a nie na stranu toho, čo sa meria (meraného). Inak povedané, matematické vety ako pravidlá (normy) reprezentácie (deskripcie) sú ako lešenie[11], z ktorého pristupujeme k svetu. Plnia teda úlohu pomocných prostriedkov pri generovaní opisov sveta (deskriptívnych viet) a pri manipulovaní s týmito opismi, napr. pri odvodzovaní jedných deskriptívnych viet z iných, t. j. pri vnútrojazykovom prechode od jedných opisov k iným.[12]

Tento spôsob nahliadania na matematické vety by mal o. i. vniesť svetlo do takej často uvádzanej (a pre niektoré filozofie matematiky problematickej) vlastnosti matematických viet, ako je ich *nevyhnutnosť*. Ak sú matematické vety meradlom, je zrejmé, odkiaľ pochádza ich „nevyhnutnosť". Je im „udelená" práve tým, že ich používame ako meradlo. Neodvodzuje sa teda napr. z povahy nejakých jej záhadných objektov, ktoré by napr. boli tak uspôsobené, že ich vlastnosti a vzájomné vzťahy sa nikdy nemenia (sú vyňaté z časových zmien), ale je daná špecifickým spôsobom používania matematických viet, spôsobom, akým fungujú v našej praxi, úlohou, akú v nej plnia. V tomto smere sa dá povedať, že matematické vety plnia rovnakú úlohu ako definície v bežnom jazyku, či „parciálne" definície. Prečo nevyhnutne platí, že každá neter je ženského pohlavia? Pretože spôsob, akým sa toto slovo používa, v sebe obsahuje aj to, že ide o niečiu dcéru, a výraz „dcéra" sa zase používa práve na označovanie potomkov ženského pohlavia.

Samozrejme, z práve povedaného neplynie, že by bolo vhodné povedať, že matematické vety sú definície. Je oveľa užitočnejšie zostať pri doterajšom spôsobe vyjadrovania, ktorý aj v rámci matematického diskurzu rozlišuje medzi vetami, ktoré sú „matematickými definíciami", a tými, ktoré nie sú definíciami. Napr. vety, že číslo 2 je párne prvočíslo, alebo že kružnica je

[11] Wittgenstein používa na jednom mieste (Wittgenstein 1956/1984, 356), kde charakterizuje funkciu matematických viet, nemecký výraz „Gerüst", ktorý znamená rámec, kostru, ale aj lešenie. Hoci si myslím, že na danom mieste je adekvátnejšie prekladať tento výraz trochu abstraktnejšie než „lešenie", budem v tomto texte predsa len využívať metaforu sugerovanú Wittgensteinovom poznámkou, pretože ju pokladám za užitočnú (bez ohľadu na to, či ju on sám chcel v čitateľovi evokovať).

[12] Ilustratívnym príkladom pre tieto dve funkcie je vyjadrenie istého stavu vecí pomocou rovnice (matematizácia situácie) a následné riešenie rovnice napr. pomocou bežných algebrických operácií.

útvar, ktorý ohraničuje najväčší obsah pri danom obvode, nie sú zvyčajne používané ako definície čísla 2 či kružnice. To však nijako nebráni tomu, aby sme poukazovali na spoločný „pôvod“ nevyhnutnosti. O mnohých matematických vetách sa presviedčame až na základe dlhej a komplikovanej dôkazovej procedúry, čo nám, pochopiteľne, nepripomína bezprostrednú zjavnosť konzekvencií plynúcich napr. z vyššie uvedenej (čiastočnej) definície „netere“. Z tohto hľadiska by teda bolo zavádzajúce nazývať napr. teorémy Peanovej aritmetiky „definíciami“, a to aj vtedy, ak ich chápeme ako parciálne konzekvencie implicitnej definície prirodzeného čísla, ktorá je stelesnená v Peanových axiómach.

A, samozrejme, existujú aj ďalšie dobré dôvody, prečo nenazývať všetky matematické vety „definíciami“. K niektorým matematickým vetám prichádzame empirickým alebo kváziempirickým experimentovaním. To je však veľmi vzdialené od toho, ako prichádzame k bežným definíciám. Opäť, treba si uvedomiť, že poukázanie sa spoločný pôvod nevyhnutnosti medzi definíciami a matematickými vetami neznamená ich stotožnenie. Toto poukázanie plní úlohu zdôraznenia určitého jedného dôležitého aspektu používania matematických viet, nie ich klasifikovanie ako definícií. Je preto dôležité dobre rozumieť tomu, čo chce povedať Wittgenstein, keď na jednom mieste akoby naznačuje, že matematické vety platia „z definície“ (Wittgenstein 1976, 111-112). Na spomínanom mieste chce Wittgenstein položiť dôraz na rozdiel medzi skúsenostnými a matematickými vetami a čisto pre tento účel používa „veľmi hrubé“ (*a most crude*) charakterizovanie, že ku každej matematickej vete by sme vždy mohli dodať afix „by definition“. Hneď v ďalšom odseku nás však Wittgenstein nenecháva na pochybnostiach o tom, prečo volí takéto vyjadrenia. Je to zámerná taktika, ktorá nás má „apriori“ odradiť od kladenia takých otázok ako „o čom je matematika“ (s filozofickým výrazom v tvári). Ak totiž na túto filozofickú pascu stúpime a odpovieme, že napr. o číslach, opäť sa dostaneme do kruhu tradičných otázok: príde niekto iný a povie, že matematika je skôr o symboloch (čísliciach), pretože čísla (vo filozofickom zmysle) sa mu zdajú byť príliš záhadné (pochybné) entity. Až nakoniec skončíme pri tom, že sa podobne ako Frege budeme cítiť povinní vážne vyvracať tvrdenia o tom, že čísla nemôžu byť zhluky uhličitanu vápenatého na tabuli (Maco 2012, 33).

Uvažovanie o matematických vetách ako o pravidlách nás zároveň privádza k odpovedi na ďalší filozofický oriešok ohľadne matematiky: problém *pravdivosti* matematických viet. Podobne ako pri poukázaní na analógiu s definíciami, keď išlo o nevyhnutnosť, aj tu by sme mohli – napodobňujúc Wittgensteina – povedať v prvom „veľmi hrubom“ priblížení, že pravdivosť matematických viet je skôr ten typ pravdivosti, ktorý pripisujeme (ak ho pripisujeme) definíciám. Z tohto pohľadu nie je pre wittgensteinovského filozofa žiadnym prekvapením, že tradične sa pri filozofovaní o matematike často hovorí o „nevyhnutnej pravdivosti" matematických viet (či o ich pravdivosti „vo všetkých možných svetoch"). Obidva tieto atribúty (pravdivosť, nevyhnutnosť) sa museli úzko prepájať – obidve záhady sa takpovediac navzájom držali (pri živote). Nevyhnutnosť je totiž zaujímavá (filozoficky vzrušujúca) iba vtedy, ak prináleží *propozíciám*, ktoré sa javia, ako keby vypovedali o nejakej realite (alebo aspekte nejakej reality), t. j. propozíciám, ktoré sú pravdivé. A naopak, pravdivosť sa stáva filozoficky osobitne zaujímavou vtedy, keď nie je hocijakou bežnou pravdivosťou („Dnes neprší"), ale keď sa takpovediac javí, ako keby bola na všetky veky, t. j. nie kontingentná, ale nevyhnutná.

Je však zrejmé, že podobne, ako to bolo pri nevyhnutnosti, ani pri pravdivosti nemožno z wittgensteinovského pohľadu celú vec jednoducho odbiť tým, že matematická veta je pravdivá takpovediac *ex definitione*. Normatívny prístup nás však v tomto ohľade vedie k produktívnejšiemu smeru pýtania sa. Hlavná filozofická otázka v tomto kontexte pre nás nestojí tak, že treba vyprodukovať čo najpresvedčivejšiu sémantiku matematiky (t. j. pokiaľ možno čo najlepšie skĺbenú s ontológiou a epistemológiou matematiky), ale ide skôr o prozaickú otázku, *prečo prijímame isté matematické vety*. Povedať, že preto, lebo (napr.) verne opisujú vzťahy medzi abstraktnými objektmi a nám ide o poznanie (zmapovanie) tohto sveta abstraktných objektov, neznamená buď vôbec nič, alebo niečo znamená, ale vôbec nie je jasné, čo by to presnejšie mohlo byť. Alebo je to takpovediac zle položená koľajnica, ktorá síce niekam ukazuje, ale v zásade vedie dostratena.

Naopak, pýtať sa, prečo prijímame tie a tie matematické vety (ako pravidlá), vedie k plodným (i keď vôbec nie ľahkým) konkrétnym výskumom, ktorých výsledky sú kontrolovateľné. Už pri prvom zamyslení sa nad takto položenou otázkou je zrejmé, že významnú rolu v odpovedi budú zohrávať viaceré faktory, a že odpovede sa budú líšiť v závislosti od konkrétnych viet, na ktoré upriamime svoju pozornosť. Medzi týmito faktormi určite budú aspoň tieto: dokázateľnosť, deduktívna plodnosť, systematická sila, aplikovateľnosť v empirickom bádaní.

(Koniec prvej časti)

Literatúra

BANGU, S.: *The Internet Encyclopedia of Philosophy*, ISSN 2161-0002, <http://www.iep.utm.edu/wittmath/, 20.11. 2016>.

BENACERRAF, P. (1973): Mathematical Truth. In: *The Journal of Philosophy*, LXX, 19, 661-679.

BROWN, J. R. (1999): *Philosophy of Mathematics. An Introduction to the World of Proofs and Pictures*. London/New York: Routledge.

DAWSON, R. (2015): *Leaving Mathematics As It Is: Wittgenstein's Later Philosophy of Mathematics*. PhD Thesis. University of East Anglia, School of Philosophy.

FOGELIN, R. J. (2009): *Taking Wittgenstein at His Word*. Princeton: Princeton University Press.

FRIEDRICH, S. (2011): Motivating Wittgenstein's Perspective on Mathematical Sentences as Norms. In: *Philosophia Mathematica* 19 (1): 1-19.

GARAVASO, P. (1991): Anti-Realism and Objectivity in Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. In: *Philosophica* 48 (2), 93-106.

GERARD, S. (1991): Wittgenstein's Philosophies of Mathematics. In: *Synthese* 87, 1, 125-142.

GEORGE, A., VELLEMAN, D. J. (2002): *Philosophies of Mathematics*. Oxford: Blackwell Publishers.

HARDY, G. H. (1940/2012): *A Mathematician's Apology*. Cambridge: Cambridge University Press.

MÜHLHÖLZER, F. (2010): *Braucht die Mathematik eine Grundlage?* Frankfurt am Main: Vittorio Klostermann.

MACO, R. (2012): Čo je to číslo? – Gottlob Frege a filozofia aritmetiky. In: Javorská, A., Sťahel, R. (eds.): *Pohľady do súčasnej filozofie*. Nitra: Filozofická fakulta UKF v Nitre, 33-48.

PANZA, M., SERENI, A. (2013): *Plato's Problem. An Introduction to Mathematical Platonism*. New York: Palgrave Macmillan.

RAMHARTER, E., WEIBERG, A. (2006): *Die Härte des logischen Muß. Wittgensteins Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Berlin: Parerga.

RODYCH, V. (2011): Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. In: E. Zalta (ed.): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2011 Edition). URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2011/entries/wittgenstein-mathematics/>.

SCHROEDER, S. (2014): Mathematical Propositions as Rules of Grammar. *Grazer Philosophische Studien*, 89, 21-36.

SHANKER, S. (1987): *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*. London: Croom Helm.

SHAPIRO, S. (2000): *Thinking about Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

STEINER, M. (1996): Wittgenstein: Mathematics, Regularities, and Rules. In: *Benacerraf and his Critics*. Cambridge, Mass.: Blackwell, 190-212.

WAISMAN, F. (1936): *Einführung in das mathematische Denken*. Wien: Gerold & Co.

WITTGENSTEIN, L. (1956/1984): *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Sinzheim: Suhrkamp.

WITTGENSTEIN, L. (1976): *Lectures on the Foundations of Mathematics*. Hassocks: The Harvester Press. LTD.

Tento príspevok vznikol ako súčasť riešenia grantového projektu VEGA 1/0258/19.

Róbert Maco, PhD.
Katedra filozofie a dejín filozofie
Filozofická fakulta Univerzity Komenského
Bratislava
robert.maco@uniba.sk