Matematické vety ako pravidlá II.

Róbert Maco
Univerzita Komenského, Bratislava, SK

MACO, R.: Mathematical Propositions as Rules II.
Philosophica Critica, vol. 6, 2020, no. 1, ISSN 1339-8970, pp. 2-17

In the first part of this paper, I attempted to expound how philosophical questions about ontological and epistemological aspects of mathematics usually arise. Subsequently, I presented Wittgenstein's normative approach to mathematics, according to which many of these traditional questions are not really deep problems, but rather the consequences of misunderstanding the use of language, leading to semantic confusions and incorrect analogies. The present second part of the paper contains an outline of responses to several standard objections to the normative conception of mathematics. The main goal is to show that the normative understanding of mathematics has tools to answer questions about the truth and objectivity of mathematics, as well as two important distinctions: between pure and applied mathematics and between normative and descriptive propositions.

Key words: Mathematics – Philosophy of Mathematics – Truth – Objectivity – Descriptive proposition – Normative proposition – Wittgenstein

V prvej časti tohto článku som sa na príklade jedného konkrétneho úvodu do matematiky (Velleman, George 2002) pokúsil ukázať, ako sa zvyčajne rodia filozofické otázky týkajúceho sa ontologických a epistemologických aspektov matematiky. Následne som predstavil wittgensteinovský normatívny prístup k matematike, podľa ktorého mnohé z týchto tradičných otázok v skutočnosti nie sú hlboké problémy, ale skôr dôsledky nesprávneho chápania používania jazyka v rôznych oblastiach, na základe čoho vznikajú sémantické konfúzie a nesprávne analógie. Namiesto toho, aby sme matematické vety používali ako „lešenie" pre deskripcie, vo filozofickom diskurze o matematike máme podľa Wittgensteina tendenciu sústreďovať sa na matematické výrazy ako na mená zastupujúce nejaký druh (abstraktných) objektov, ktorých „ontologický status" je nejasný a kontroverzný.

Jednoduchá veta ako napr. „101 je prvočíslo“ sa tak môže stať podnetom pre kladenie „filozofických“ otázok: Aký typ entity je číslo 101, o ktorom hovorí táto veta? Aký je jeho „ontologický status“? Ako je nám táto entita daná? A podobne.

Ako môžeme rozpoznať, že v týchto prípadoch ide o zavádzajúce otázky? Jedným z indikátorov (ktorý som podrobnejšie rozoberal v prvej časti tohto článku) sú konzekvencie takto nastaveného filozofického skúmania: čoraz väčšie zapletanie sa do čoraz menej zrozumiteľných alebo čoraz podivnejších filozofických teórií. Teraz sa však na to pozrime ešte z inej strany. Všimnime si, v akých prípadoch máme tendenciu pustiť sa cestou práve naznačeného filozofovania. Budem sa snažiť obhájiť tvrdenie, že táto tendencia vzniká z istého „prekríženia“ matematického a bežného spôsobu vyjadrovania. Aby som ozrejmil, čo tým myslím, predstavím najprv obe zložky osamote.

Pod „matematickým vyjadrovaním“ mám na mysli matematické formuly ako súčasť určitého kalkulu. Napr. axiómy systému reálnych alebo prirodzených čísel sú formulami, ktoré patria do istého kalkulu (vrátane logických pravidiel). Na druhej strane, pod „bežným vyjadrovaním“ myslím prehovory typu „Mám päť jabĺk“. Chcem povedať, že ak berieme tieto dva typy jazykových úkonov osve, otázky povahy matematických entít sú irelevantné, ba dokonca pôsobia čudne. Uvedomme si umelosť takého chápania vety „mám päť jabĺk“, ktoré by slovo „päť“ v tejto vete interpretovalo ako znak zastupujúci abstraktný objekt 5, takže celá veta by vypovedala o istom pozoruhodnom prepojení určitej skupiny ovocia s určitou abstraktnou entitou. To isté je, myslím, možné povedať aj na strane matematického vyjadrovania. Keď používame daný kalkul, *nehovoríme o niečom*, ale riadime sa pravidlami pri transformácii istých reťazcov znakov na iné reťazce znakov (predstavme si napr. kompletný *formálny* dôkaz vety, že 101 je prvočíslo, v rámci peanovskej aritmetiky).

Kde a kedy teda vzniká pokušenie pýtať sa na existenciu a status matematických entít vo filozofickom zmysle? Vtedy, keď sa tieto spomenuté dve roviny (praxe) prekrížia, t. j. vtedy, keď vyjadríme bežným verbálnym jazykom *niečo matematické*. Keďže pri bežnom hovorení sme zvyknutí hovoriť prevažne o konkrétnych veciach, ľuďoch atď., je veľmi prirodzené, že aj za matematickými formuláciami v bežnom jazyku máme tendenciu vidieť niečo viac než len pravidlá.

Toto moje vysvetlenie však čelí jednej vážnej námietke. Nebolo rozdelenie (kalkul vs bežný jazyk), ktoré som pritom použil, umelé? Ak by sme aj súhlasili, že ani v používaní kalkulu, ani v používaní bežného jazyka nevzniká prelud matematických objektov, mohli by sme napriek tomu odmietnuť môj záver, a to s odôvodnením, že matematická prax predsa nepozostáva z „kalkulatívnych" úkonov. Matematik predsa používa svoju fantáziu, robí myšlienkové experimenty, predstavuje si svoje matematické objekty ako prvky nejakých väčších celkov alebo v rozličných vzájomných vzťahoch, inšpiruje sa svojou empirickou skúsenosťou, využíva priestorovú predstavivosť atď. Matematický systém ako kalkul je v istom zmysle už neživá forma matematiky, ktorá je až výsledným produktom, keď už predtým prebehlo veľa kreatívnej práce. A keď táto objavná či tvorivá činnosť prebieha, matematik myslí na svoje predmety ako na objekty, nepremýšľa *prima facie* o pravidlách, ale o matematických entitách, ktoré chce lepšie pochopiť. Zdá sa teda, že skúsenosť s matematickými vetami ako s deskriptívnymi, ako s hovoriacimi o matematických entitách a stavoch vecí, je primárnejšia než ich dodatočná interpretácia ako pravidiel (noriem) opisu. Každá dobrá filozofia matematiky však musí brať vážne do úvahy živú matematickú skúsenosť, pretože práve v nej sa rodí (či objavuje) matematika. Hrozí nám teda, že obrat k normatívnemu chápaniu matematických viet, ktorý som v nadväznosti na Wittgensteina odporúčal ako menej zavádzajúci a produktívnejší spôsob filozofického nahliadania na matematiku, nebude dostatočne verný matematickej skúsenosti a praxi a je ho preto treba odmietnuť.

Takýto záver by však bol unáhlený. Pokúsim sa ukázať, že hrozba načrtnutá v predchádzajúcom odseku nie je až taká hrozivá a že normatívne chápanie matematiky si zaslúži nielen pozornosť, ale aj nasledovanie.

V prvom rade treba, samozrejme, uznať, že veľká časť reálnej matematickej práce neprebieha „kalkulatívne", čiže formou transformácie jedných formúl na iné podľa vopred určených pravidiel. Stručne povedané, matematik využíva všetko, čo môže, všetko, čo má k dispozícii: intuície, predstavivosť, metódu pokus – omyl atď. Takisto sa dá súhlasiť s tým, že pri premýšľaní o matematických problémoch je často veľmi prirodzené uvažovať o matematických objektoch *per analogiam* k bežným predmetom. Dokonca aj v prípadoch, kedy by sa nikto znalý veci neodvážil tvrdiť, že má čo i len približne dobrú predstavu o nejakom matematickom objekte, môže byť (heuristicky) užitočné predstavovať si daný objekt aspoň v niektorých jeho aspektoch (napríklad pri skúmaní, či nejaké nekonečné množiny majú spoločný prienik). Tvrdím však, že ani toto všetko nepredstavuje dôvod pre to, aby sme normatívne chápanie matematických viet diskvalifikovali ako pomýlený alebo zásadne neadekvátny filozofický spôsob uvažovania o matematike.

Po prvé, je rozdiel medzi tým, ako sa dospieva k matematickým vetám a ako sa tieto vety následne používajú v matematickej i mimomatematickej (aplikačnej) praxi. Hoci istá veta môže byť objavená čisto induktívne (v empirickom zmysle), alebo metódou pokus – omyl, legitímnou (všeobecne uznávanou) súčasťou matematiky (korpusu matematických poznatkov) sa stáva až vtedy, keď je presne umiestnená v rámci nejakého širšieho matematického systému, či už ako teoréma alebo ako axióma. Inak povedané, či už ako rozpoznaný dôsledok prijatých základných pravidiel, alebo ako súčasť práve týchto akceptovaných základných pravidiel. V oboch prípadoch, či už ide o axiómy alebo teorémy, nestojí nič v ceste nahliadať na ne ako na pravidlá, ktoré majú v rámci našich jazykových hier (matematických i mimomatematických) regulatívnu, a nie deskriptívnu funkciu.

Po druhé, matematická skúsenosť, v rámci ktorej sa intuitívne chápu matematické vety ako hovoriace o nejakých matematických objektoch, alebo ako opisujúce isté matematické objekty nediskvalifikuje normatívne chápanie matematiky. Samozrejme, na prvý pohľad sa zdá, že taká matematická skúsenosť silne podporuje objektovo orientované filozofie matematiky.[1] Tvrdím však, že pri bližšom rozbore sa tento faktor ukazuje ako nedostatočný. Uvediem dva dôvody:

a) To, že intuitívne o nejakom druhu viet uvažujeme ako o vetách vypovedajúcich o určitých typoch objektov, ešte nemusí znamenať, že tento spôsob chápania je najsprávnejší (najužitočnejší) z filozofického hľadiska, alebo prípadne aj z nejakého iného systematického hľadiska. Napr. isté fyzikálne vety (termodynamiky) môže byť z niektorých (napr. heuristických) hľadísk užitočné ponímať ako vety vypovedajúce o energii ako entite, ktorá sa presúva z jedného miesta na druhé, alebo isté iné vety (v kvantovej teórii) môže byť niekedy užitočné chápať ako deskriptívne vety o „virtuálnych časticiach“. Inou otázkou však je, či je z filozofického hľadiska (alebo aj z iného fyzikálneho hľadiska) správne chápať energiu ako entitu typu akéhosi fluida, alebo či je správne chápať *virtuálne* častice na spôsob *reálnych* častíc, ako sú kvarky, elektróny či neutrína.
b) Hoci profesionálny matematik môže intuitívne chápať matematické vety ako vety opisujúce nejaké objekty, toto intuitívne chápanie má

[1] Jeden z typických argumentov (a niekedy aj jediný) v prospech platonizmu vo filozofii matematiky je súlad, ktorý údajne platonizmus zachováva medzi „štandardnou sémantikou“ a sémantikou matematických viet. Ak je pravda, že Mary má rada zmrzlinu, potom Mary určite existuje. Rovnako, ak je 7 viac ako 3, potom číslo 7 určite existuje. Pozri napr. (Brown 1999, 12) alebo (Panza, Sereni 2013, 6-7). Toto je, samozrejme, jedna časť klasickej dilemy, ktorú veľmi vplyvným spôsobom nastolil Benacerraf vo svojom článku (Benacerraf 1973): buď treba pre matematické vety vymýšľať nejakú neštandardnú sémantiku, alebo môžeme zostať pri štandardnej, ale potom musíme podať nejaké plauzibilné vysvetlenie toho, ako je možný epistemický prístup k abstraktným objektom.

zväčša ďaleko od filozofických teórií abstraktných objektov. Väčšina takých matematikov by zrejme nepokladala otázky, ktoré vznikajú pre filozofov, za hodné pozornosti, ba dokonca by im možno zneli bizarne. Je rozdiel medzi intuitívnym chápaním napr. čísel ako objektov, ktorých vlastnosti a vzťahy sa usilujem preskúmať, a medzi otázkami typu „Sú čísla ako abstraktné objekty kauzálne inertné?“, „Sú čísla ontologicky nezávislé od poznávajúceho subjektu?“ atď. Samozrejme, to, že bežnému matematikovi sa zdajú takéto myšlienkové extrapolácie nepríťažlivé či dokonca bizarné, má objektovo orientovaný filozof matematiky tendenciu vysvetľovať tým, že matematika *qua* matematika zaujíma hlavne alebo dokonca výlučne striktne matematický aspekt čísel, preto mu otázky ontologického statusu a pod., ktoré *na pohľad* prirodzene nadväzujú na matematikov intuitívny spôsob nahliadania na čísla, neprídu ako atraktívne – tu má štafetu prebrať práve filozof matematiky. Chcel by som však predložiť inú interpretáciu tejto situácie: Väčšinu profesionálnych matematikov nezaujímajú tieto ontologické a epistemologické záhady *preto*, lebo ich intuitívne chápanie matematických objektov je v skutočnosti oveľa vzdialenejšie od objektovo orientovaných filozofií matematiky, než sa to takíto filozofi matematiky snažia sugerovať. V takom prípade by napr. platonistická filozofia matematiky nebola prirodzeným predĺžením intuitívnych náhľadov väčšiny profesionálnych matematikov, ale mohla by sa mať k matematike podobne, ako sa mal energetizmus k fyzike a vitalizmus k biológii na prelome 19. a 20. storočia. Pokiaľ takéto metafyzické koncepcie pokladáme za neuspokojivé, či už v ich samých základoch alebo v ich konzekvenciách, otvára sa tu cesta k radikálne odlišnému chápaniu matematiky, a tým je mnou odporúčaný normatívny prístup.

Námietky voči normatívnemu chápaniu matematiky

V tejto časti sa pokúsim aspoň načrtnúť odpovede na niektoré výhrady voči chápaniu matematických viet ako pravidiel (noriem) opisu. Mojim cieľom nebude podať vyčerpávajúce odpovede, ale skôr iba naznačiť smer, ktorým by sa podrobná reakcia na predložené námietky uberala. Hlavným zámerom tejto časti je dostatočne čitateľa presvedčiť o tom, že to, čo by sa mohlo zdať ako smrteľná rana voči normatívnemu chápaniu v skutočnosti nepredstavuje principiálny problém. To, samozrejme, nevylučuje, že by sa mohli objaviť ešte aj iné pripomienky. Tie, ktoré spomeniem, však pokladám v tomto okamihu za najrelevantnejšie.

i) *Pravdivosť alebo „pravdy-schopnosť“ (truth-aptness) matematických viet*
Ak sú matematické vety v podstate pravidlá opisu, a nie deskriptívne vety, potom nemá zmysel hovoriť o matematických vetách ako pravdivých (alebo nepravdivých), pretože pravidlá nie sú ani pravdivé, ani nepravdivé, nanajvýš o nich môžeme hovoriť ako o platných alebo vhodných na určité účely. Nie je to však v príkrom spore s tým, ako matematické vety bežne chápeme, a ak áno, ako ospravedlníme tento rozpor, pokiaľ naším filozofickým cieľom je porozumieť matematike takej, aká je, a nie ju reformovať podľa našich filozofických predstáv?

Odpoveď na túto námietku sa bude pohybovať v intenciách toho, čo som už predoslal, takže si dovolím len stručné zhrnutie.

a) Súčasťou normatívneho chápania nie je popieranie pravdivosti matematických viet, ale lepšie porozumenie tomu, čo (obvyklé) prisudzovanie pravdivosti v tomto kontexte znamená, t. j. lepšie porozumenie tomu, akú úlohu hrá v matematike pravdivosť.

b) To, že matematické vety chápeme ako pravidlá, nepredstavuje principiálnu prekážku pre prisudzovanie pravdivosti. Samozrejme, vzorovým prípadom prisudzovania pravdivosti sú faktuálne výpovede (skúsenostné vety vo Wittgensteinovom zmysle), a v tomto zmysle matematické vety pravdivé nie sú. Je si však treba uvedomiť, že ani v iných kontextoch nemáme problém používať predikát „pravdivý“ bez toho, že by sme museli upadať do zmätkov z viacznačnosti. Príkladom toho sú bežné definičné vety, alebo vety, ktoré sme v prvej časti označili ako „parciálne definície“. Nemáme problém s tým, pokladať vety ako „Každá neter je niečia dcéra“ za pravdivé, hoci nejde o pravdy vo faktuálnom zmysle, ale skôr o „gramatické vety“, t. j. vety, ktoré vyjadrujú pravidlá používania slov, ktoré sú v nich obsiahnuté. Podobne veta „Každá palica je podlhovastá“ nie je empiricky falzifikovateľná, pretože nemá empirický, ale skôr iba „sémantický“ obsah, ktorý v tomto prípade nie je ani tak odvodený z nejakej explicitnej definície „palice“ (pretože okrem bežných lexikálnych definícií tu žiadna definícia naporúdzi nie je), ale z bežného používania tohto výrazu kompetentnými hovorcami slovenského jazyka. A takisto veta „Strelec sa po šachovnici pohybuje po uhlopriečkach“ je tiež celkom bežný kandidát na pravdivú vetu, a to aj v prípadoch, kedy nie je použitá ako faktuálny opis toho, čo sa deje na konkrétnej šachovnici, ale aj vtedy, ak sa používa v zmysle stanovenia (alebo pripomenutia) pravidla ťahania s uvedenou figúrkou.

c) Pravdivosť matematickej vety chápanej ako pravidlo teda – stručne povedané – znamená akceptovanosť tejto vety ako pravidla. Ak sa chceme dozvedieť viac, pýtajme sa na to, prečo (z akých dôvodov) danú vetu (dané pravidlo) akceptujeme. Tým zároveň získame prehľad o úlohe, akú plní „pravdivosť" v matematike. Žiadnu inú pravdivosť nepotrebujeme. Ak by chcel niekto namietnuť, že je to práve naopak, že matematickú vetu práveže akceptujeme preto, lebo je pravdivá, takáto námietka by bola dutá.[2]

ii) *Objektivita matematiky*

Nasledujúca námietka čerpá svoju silu z podozrenia, že matematické vety chápané ako pravidlá sú obeťou prílišného subjektivizmu (antropologizmu). Ak by som si mal vypožičať nietzscheovský zvrat, povedal by som, že namietateľ chce varovať pred tým, aby sa z matematiky v našom chápaní nestalo niečo „ľudské, príliš ľudské". Hovoriť totiž o pravidlách bez bytostí, ktoré sa týmito pravidlami riadia, zdá sa, nemá zmysel. Nie sú teda matematické vety z hľadiska normatívneho chápania závislé od ľudí? Svoju odpoveď opäť rozdelím do niekoľkých krátkych bodov:

a) V prvom rade si treba uvedomiť, s akým presným pojmom objektivity pristupujeme ku kladeniu spomínanej otázky. Prvou úlohou by teda bolo vyjasniť si, čo rozumieme pod „objektivitou". Možno najlepšie je začať z opačnej strany a osvetliť si významy, v akých matematické vety určite nie sú subjektívne:

b) Matematické vety (aj keď chápané ako pravidlá) nie sú subjektívne v tom zmysle, ako sú subjektívne konkrétne pocity, pretože matematické vety sú intersubjektívne plne zdieľateľné (komunikovateľné);

c) Matematické vety nie sú subjektívne v tom zmysle, že by boli arbitrárne. Matematické vety (pravidlá) neprijímame ľubovoľne, ale kladieme na ne kritériá, ktoré musia splniť.

d) Z hľadiska ich genealógie matematické vety nie sú subjektívne ani v tom zmysle, že by kritériá, ktoré na ne kladieme, boli, povedzme, čisto estetického charakteru. Matematika vznikla preto, lebo bola užitočná pre vyrovnávanie sa so svetom a aj naďalej vzniká množstvo matematiky práve na základe toho, že hľadáme nové sofistikovanejšie „lešenia" z ktorých by sme mohli pristupovať k opisu sveta. Ak chce niekto povedať, že matematika transcenduje ľudskú subjektivitu (ako druhu), pretože svet sa riadi podľa nej (bez ohľadu na to, či my ľudia existujeme alebo nie), filozof hlásiaci sa k normatívnemu

[2] Odpoveď na otázku, prečo napr. akceptujeme axiómu výberu ako legitímnu súčasť matematiky, nemôže byť, že preto, lebo je pravdivá (a nič viac).

chápaniu berie takéto vyhlásenie ako trochu patetickejšiu formu konštatovania, že nástroje pomocou ktorých formulujeme svoje opisy sveta, si volíme okrem iného aj podľa toho, aby následné opisy fungovali na ciele, pre ktoré si ich tvoríme.

e) Žiadne iné formy objektivity matematiky okrem tých spomenutých v bodoch b), c) a d) nepotrebujeme. Každý, kto nás bude chcieť presvedčiť o opaku, musel by najprv sformulovať koherentný pojem objektivity, ktorý by nejako prekračoval tie už zmienené (v rámci čoho by nám, samozrejme, musel naznačiť aj zdôvodňovacie procedúry, ktoré by sme mohli používať pri vyhodnocovaní jednotlivých viet z hľadiska navrhnutého pojmu objektivity).

iii) *Čistá a aplikovaná matematika*

Ako sme videli, normatívne chápanie matematiky nás vyzýva k tomu, nahliadať na matematické vety ako na pravidlá *opisu*, a dôrazne nás odhovára od toho, aby sme ich chápali ako deskriptívne vety. Sú však všetky vety matematiky pravidlami pre opis nejakých faktov? Neexistujú azda rozľahlé časti matematiky, ktorých vety nefungujú ako normy žiadnej deskripcie, a to nielen preto, že sme ich ešte zhodou okolností nestihli takto použiť, ale v niektorých prípadoch možno aj preto, že takto principiálne nie sú použiteľné?[3] V tejto súvislosti sa ako najokatejší príklad (a tiež zrejme najčastejšie používaný) ponúka teória množín vo svojich najvyšších partiách (teórie veľkých kardinálov a pod.). Ale aj v iných matematických disciplínach, ktoré majú na prvý pohľad bližšie k praktickým aplikáciám, sa nepochybne nachádzajú časti, ktoré si možno nijaké použitie vo forme normy reprezentácie sveta nikdy nenájdu. Niektorí matematici si možno matematiku cenia tým viac, čím je nezávislejšia od fyzického sveta, čím je (v tomto zmysle) „čistejšia".[4] Ak by sme postoje týchto matematikov pokladali za bernú mincu, zdá sa, že v tom prípade by normatívne chápanie matematiky míňalo práve to, čo je na matematike najpodstatnejšie, „najvyššie"

[3] Ak by táto druhá možnosť bola vnímaná ako príliš silná (ako môžeme vedieť, že v princípe nie sú aplikovateľné?), stačí, ak sa uspokojíme s miernejšou verziou: pre opodstatnenosť diskutovanej námietky by stačilo, ak by platilo, že existujú isté časti súčasnej matematiky, pri ktorých si momentálne nevieme ani len predstaviť, ako by moli byť využité ako normy reprezentácie empirickej reality.

[4] V sekundárnej literatúre sa takýto postoj veľmi často exemplárne pripisuje anglickému matematikovi G. H. Hardymu. Netreba však zachádzať priďaleko a tvrdiť, že Hardy opovrhoval praktickými aplikáciami matematiky (ako sa to niekedy interpretuje). Hardy sa voči takémuto charakterizovaniu svojich vlastných názorov vyhranil vo svojej slávnej populárnej knihe o matematike (Hardy 1940/2012, 120).

– a to by nebola dobrá vizitka pre filozofiu, ktorá sa usiluje porozumieť reálnej matematike.

Ale aj keby sme názory uvedených matematikov pokladali skôr sa marginálne glosy nemnohých jednotlivcov, stále by zostával problém existencie neaplikovanej, ba možno neaplikovateľnej matematiky. Ako môžeme dané matematické vety chápať ako pravidlá deskripcie, keď neregulujú žiadne empirické deskripcie?

Wittgenstein sám na tento problém narazil pri svojich poznámkach o teórii množín. V jeho zápiskoch z rokov 1942-1944 môžeme sledovať, ako ho jeho dôraz na aplikovateľnosť matematiky (v reálnom živote a v empirických vedách) veľmi rýchlo privedie k spomenutému problému:

„Chcem povedať: Pre matematiku je podstatné, že jej znaky sa používajú aj v *civile*. Použitie mimo matematiky, teda *význam* znakov, je tým, čo zo znakovej hry robí matematiku." (Wittgenstein 1956/1984, 257).

„Ak je intendovaná aplikácia matematika podstatná, ako je to potom s tými časťami matematiky, ktorých aplikácia – alebo aspoň *to*, čo matematici pokladajú za aplikáciu, – je úplne chimérická [*phantastisch*]? Ako keď človek pracuje na matematickej disciplíne, ako je teória množín, o aplikácii ktorej si vytvára úplne nesprávny pojem. Nerobí *napriek tomu* matematiku?" (Wittgenstein 1956/1984, 259-260)

Aj keď Wittgenstein v tejto časti textu nikde explicitne neodpovie kladne na poslednú otázku, z celkového ladenia týchto pasáží sa dá celkom spoľahlivo usúdiť, že jeho záverom nie je to, že napr. teória množín nie je legitímnou súčasťou matematiky. Odpoveď na predloženú námietku voči normatívnemu chápaniu matematiky určite nemôže spočívať v tom, že odoprieme status matematickosti všetkým tým vetám aktuálnej matematiky, ktoré neslúžia ako pravidlá deskripcie.

Moja odpoveď na nastolenú námietku bude skôr vychádzať z lepšieho zamyslenia sa nad tým, čo znamená zastávať normatívne stanovisko v rámci filozofie matematiky. K tomu je dôležité pripomenúť, ako som na samom začiatku tohto textu formuloval jeho hlavný cieľ. Išlo o to, „presvedčiť čitateľa, že pri filozofovaní o matematike je *najmenej zavádzajúcim a zároveň najproduktívnejším* spôsobom chápania matematických viet normatívne chápanie". Kurzívou zdôraznené časti mali hneď od začiatku jasne naznačovať, že nepôjde o pokus o nejakú formu esencialistických filozofických výpovedí o matematike, resp. o matematických vetách. Mojím cieľom (v súlade s Wittgensteinovým prístupom) nie je nástojiť na tom, že isté filozofické tvrdenie vystihuje podstatu matematiky, resp. matematických viet. Ale nie preto, že by som pokladal podstatu matematiky za nepoznateľnú, alebo preto, že by som takpovediac (pod tlakom okolností) zľavil z filozofických nárokov a uspokojil sa s tým, že podám (v nadväznosti na Wittgensteina) akoby len môj skromný „najlepší tip" ohľadne podstaty matematiky.

Dôvod je veľmi odlišný. Z hľadiska môjho prístupu totiž nemá žiadny dobrý zmysel hovoriť o *podstate* matematiky. Všetky výpovede, ktoré by sme mohli označiť ako „esenciálne" (t. j. hovoriace o podstate nejakej veci s filozofickou emfázou), sú pri bližšom prihliadnutí „gramatickými vetami", t. j. vyjadrením či stanovením pravidla používania príslušného výrazu. Hovoriť o podstate matematiky by dávalo dobrý a zrozumiteľný zmysel, keby matematika (resp. matematická veta) bola ako prvočíslo či grupa, t. j. keby existovala presne stanovená a široko prijímaná definícia termínu „matematika" (resp. „matematická veta") podobne, ako to je v prípade „prvočísla" či „grupy". Termín „matematika" či „matematická veta" však – rovnako ako veľká väčšina slov nášho jazyka – nemá v tomto zmysle definíciu. A tam, kde nie je definícia, tam nie je ani podstata.

Druhý spôsob, ako by hovorenie o podstate matematiky či matematických viet mohlo mať jasne zrozumiteľný zmysel, by spočíval v tom, že by niekto chcel preskriptívnym spôsobom povedať, čo je to matematika, resp. matematická veta. Išlo by teda o nové (predtým v tejto presnej podobe neexistujúce) stanovenie významu tohto termínu. A, samozrejme, za tým by musela nasledovať „zdôvodňujúca správa" o tom, prečo a čím presne je tento návrh užitočný.

Prístup, ktorý sa snažím prezentovať a odporúčať v tomto článku, nejde ani jednou z týchto dvoch ciest. Normatívne chápanie matematických viet neznamená odhalenie podstaty týchto viet, pretože v prvom zmienenom zmysle taká podstata jednoducho neexistuje, a v druhom zmysle zasa nie je mojou ambíciou redefinovať pojem matematickej vety. Mojím jediným zámerom je získať taký spôsob nahliadania na matematické vety, ktorý splní dva hlavné ciele: po prvé, umožní vyhnúť sa kladeniu neplodných a zavádzajúcich filozofických otázok ohľadne matematiky, a, po druhé, bude podnecovať ku kladeniu produktívnych a zaujímavých otázok. Z hľadiska týchto cieľov môže byť každá filozofická charakterizácia matematických viet len určitým pomocným prostriedkom, ktorý využívame, aby sme nadobudli produktívnejšiu perspektívu. Pravidlá, a ani pravidlá deskripcie, nie sú esenciou matematických viet v tom zmysle, ako by to chcela a ako by si to rada nárokovala tradičná (newittgensteinovská) filozofia matematiky.

Pravidlá (deskripcie) sú „len“ tým filozoficky najefektívnejším modelom, s ktorým môžeme porovnávať reálny matematický diskurz a pomocou ktorého sa môžeme vyhnúť (často veľmi lákavým) scestiam. Ak by som mal použiť hrubú analógiu z inej oblasti: filozof umenia by mohol odporúčať, aby sme sa na umenie pozerali ako na kreatívnu činnosť, pričom by mohol mať osobitne na mysli to, že by nás chcel odkloniť od nejakého predchádzajúceho spôsobu nahliadania na umenie, napr. ako na napodobňujúcu (kopírujúcu) činnosť.

Ako toto celé presne súvisí s odpoveďou na námietku ohľadne zlučiteľnosti „čistej matematiky“ s normatívnym chápaním? Odpoveď znie, že – v súlade s predchádzajúcimi vyjadreniami – model matematických viet ako pravidiel deskripcie využívame tam, kde je produktívny, no nevnucujeme ho nasilu tam, kde je nedostatočný. V tých častiach matematiky, ktoré neslúžia (aspoň zatiaľ) ako regulatívy pre tvorenie empirických deskripcií a na symbolické manipulovanie s nimi, musíme priviesť do hry iné hľadiská, než sú pravidlá deskripcie.

Takýto zvrat môže ľahko vyvolať dojem, že ide buď o rezignáciu alebo o istý podvodný trik. Trik by spočíval v tom, že doposiaľ som sa akoby tváril, že pravidlá deskripcie v matematike všetko vysvetľujú, no teraz pri náraze na vzpierajúce sa fakty chcem upustiť od doterajšieho prístupu a zaviesť iný. Takáto kritická pripomienka by však bola namieste len za dvoch podmienok. Po prvé, ak by som už predtým nevysvetlil, v akom zmysle a za akým účelom som využíval model pravidiel deskripcie, a, po druhé, ak by moje dodatočné poznámky o „čistej matematike“ boli v zásadnom rozpore s hlavnou myšlienkou normatívneho chápania matematiky. No základnou myšlienkou normatívneho chápania je to, že matematické vety majú skôr povahu *pravidiel* než deskriptívnych viet (chápaných podľa modelu bežných empirických tvrdení o svete). To, že nie všetky matematické vety fungujú ako „lešenie“ pre empirické deskripcie, neznamená, že sa v týchto nezlučiteľných prípadoch vraciame k chápaniu matematických viet ako deskripcií. Skôr si týmto len lepšie uvedomujeme, že matematické vety môžu plniť viacero odlišných úloh. No tieto úlohy sú viac či menej úzko prepojené s úlohou pravidiel deskripcie. Ako tomu možno rozumieť?

Dôkladný výklad by si vyžadoval viac miesta, preto sa pokúsim len naznačiť hlavný smer uvažovania, ktorý v podstate spočíva na jednoduchom postrehu. Na to, aby matematické vety, ktoré naozaj fungujú ako pravidlá či normy reprezentácie empirickej reality, plnili svoju úlohu efektívne, je často potrebné vytvárať širší aparát, ktorý im takpovediac vytvára zázemie. Časti matematiky, ktoré takto vznikajú, nie sú bezprostredne aplikované pri empirickom skúmaní, ale tvoria takpovediac širšiu časť lešenia. Aby som zostal vo wittgensteinovskej metafore, povedal by som, že matematické vety používané ako regulatívy empirickej praxe sú tými časťami lešenia, z ktorých takpovediac priamo siahame na budovu reálneho sveta, zatiaľ čo ďalšie súčasti matematiky tvoria tie oddiely lešenia, ktoré sa nachádzajú ďalej od budovy, resp. na ktorých sa priamo pri práci nestojí, no ktoré robia dané lešenie stabilnejším, bezpečnejším, systematickejším, prehľadnejším a možno aj estetickejším.

iv) *Rozlíšenie medzi normatívnymi a deskriptívnymi vetami*

Ak sa mi podarilo čitateľa aspoň predbežne presvedčiť, že predchádzajúca námietka nepredstavuje neprekonateľnú výzvu pre normatívny prístup k matematike, hoci zasiahla veľmi dôležitý bod tohto chápania, kritika, ktorú chcem predstaviť v tejto časti, by mohla s ešte väčším nárokom vystupovať ako zásadné spochybnenie wittgensteinovsky inšpirovanej filozofie matematiky. V hre je teraz totiž ústredné rozlíšenie medzi výpoveďami majúcimi povahu pravidiel a výpoveďami majúcimi povahu deskripcií. Stručne vyjadrené, námietka znie takto: Ak vyjdeme z veľmi populárnej quineovskej predstavy o našom poznaní ako o sieti presvedčení (*web of beliefs*), v ktorej neexistujú žiadne apriori nerevidovateľné presvedčenia, ale pri ktorej sa dá hovoriť nanajvýš o rozdiele v stupni odolnosti medzi jednotlivými presvedčeniami, t. j. podľa toho, či sa nachádzajú viac v centre (ako logické a matematické presvedčenia) alebo viac na periférii (bezprostredné pozorovacie vety), wittgensteinovské dôrazné rozlišovanie medzi vetami ako pravidlami a deskriptívnymi vetami sa bude musieť zdať ako pomýlené od samého začiatku. Existuje vôbec taký významný rozdiel medzi pravidlami (normami) a deskripciami, aby na ňom bolo možné založiť normatívny prístup k matematike? Neplatí skôr téza, že táto dištinkcia je umelým rezom našou epistemickou sieťou, pretože – koniec koncov – nemohli by sme rovnako oprávnene trvať na tom, že všetky naše vety sú pravidlá, ibaže niektoré revidujeme s menšou ochotou než iné? Alebo dokonca, nemohli by sme argumentovať, že v zásade by sme aj naše skúsenostné výroky typu „Na stole je pohár“ mohli ponímať ako také pravidlá, ktorých sa za žiadnu cenu nechceme vzdať a v dôsledku tohto radšej upravíme všetko ostatné v našej sieti presvedčení? Ak je však situácia takáto „tekutá“, v čom je potom prínos wittgensteinovského postrehu o kľúčovom rozdiele medzi vetami matematiky ako pravidlami a vetami empirických vied ako deskripcií?

Vyčerpávajúca odpoveď na námietky tohto typu by zrejme mala obsahovať detailný rozbor quineovskej holistickej a naturalistickej epistemológie, čo nie je v možnostiach tohto textu. Porovnanie wittgensteinovského a quineovského spôsobu myslenia by nepochybne prinieslo viacero zaujímavých stretov, a to tak v zmysle vzájomného súladu ako aj nesúladu. Keďže táto téma bola už viackrát preskúmaná inými autormi, obmedzím sa v tomto kontexte len na to, že poukážem na tie práce, ktoré pokladám za najprínosnejšie a svoj vlastný príspevok zacielim len na úzko vymedzenú tému tohto článku. Pokúsim sa formou niekoľkých predbežných komentárov ukázať, že aj napriek tomu, že quineovsky inšpirovaná kritika normatívneho chápania matematických viet skutočne prináša do hry niektoré povšimnutiahodné aspekty, nie je to dôvod na to, aby sme začali našu loď opúšťať.

Pozrime sa v prvom rade bližšie na pripomienku, že každú (aj empirickú) vetu môžeme pochopiť ako pravidlo v tom zmysle, že ju takpovediac ponecháme nepohnutú a premiestňovať budeme radšej všetko ostatné, nech už by nám to spôsobovalo akékoľvek ťažkosti. Ak túto tézu dostatočne rozmeníme na drobné, ukáže sa, že s ňou môže v určitom zmysle súhlasiť aj filozof hlásiaci sa k normatívnemu chápaniu matematiky. Ani takýto filozof totiž nemá dôvod popierať prednesenú hypotetickú možnosť. Jedným dychom by však dodal, že toto nijako nenarušuje jeho prístup, pretože on na matematické vety nahliada ako na pravidlá práve preto, že tieto „vety" reálne ponechávame nepohnuté. Dôležité je, že toto „ponechávame nepohnutým" je súčasťou našej praxe, je to charakteristika individuálnych použití príslušných „viet". Nehovoríme tu teda o tom, čo by hypoteticky mohlo byť, ale o tom, akým spôsobom funguje naša reálna matematická prax.

Sčasti tu možno ide o istý terminologický problém. Ak niekto namietne, že aj (na pohľad) empirická veta je (alebo môže byť) pravidlom, mali by sme si v prvom rade ozrejmiť, čo v tomto kontexte rozumieme pod „pravidlom". Nech už si však svoje jazykové konvencie vyriešime akýmkoľvek spôsobom, zrejme sa predsa len budeme zhodovať aspoň v tom, že v daných konkrétnych prípadoch používame isté vety ako „meradlá", zatiaľ čo iné sú podrobované „meraniu". Keď napr. pri prijímacích skúškach počítam počet uchádzačov píšucich test a raz mi vyjde 42 a druhý raz 43, neusúdim z toho, že 42 = 43, ale zapochybujem o správnosti jedného z týchto výsledkov (alebo možno aj oboch). Povedať v takomto prípade, že „aritmetické pravdy" predstavujú len silnejšie zakorenené a voči revízii rezistentnejšie presvedčenia než presvedčenia nadobudnuté pomocou zraku, namiereného ukazováka a tichého odriekania základných čísloviek, by znamenalo približovať k sebe dve veci, ktoré majú od seba veľmi ďaleko. Samozrejme, nemožno si tu osobovať absolútne práva a vyhlasovať, že robiť niečo také je „apriori" chybné. Ak sa chce niekto pokúsiť priviesť spomenuté dva prípady takpovediac na nejakého spoločného menovateľa, môžeme ústretovo sledovať, čo z toho vychádza. Je totiž zrejmé, že aj z pozície normatívneho chápania môžu mať uvedené „presvedčenia" niečo spoločné. Napríklad, je jasné, že aj pravidlá podliehajú zmenám, nie sú tu odvždy a naveky – v tomto ohľade sa podobajú falibilným empirickým zisteniam. Otázka však je, či je v danej situácii tento spoločný aspekt taký významný, aby prebil iné rozdielne aspekty.

Záver

Ako som zdôraznil už vyššie, osvojenie si normatívneho chápania matematických viet neznamená automatické vyriešenie (alebo eliminovanie) všetkých jednotlivých otázok filozofie matematiky. Ide skôr o zaujatie novej perspektívy, z ktorej sa majú staré problémy ukázať v jasnejšom svetle a v prístupnejšom tvare. Prirodzene, treba počítať aj s tým, že zvolením si tohto prístupu vzniknú aj nové druhy problémov, a to aj také, ktoré sa z pohľadu newittgensteinovských filozofií matematiky ako problémy vôbec nejavia. Pre posúdenie prínosu navrhovaného chápania je však rozhodujúca celková bilancia objasnených a novovzniknutých problémov a tiež samotná povaha novovzniknutých problémov. To znamená, po prvé, či tieto problémy vystupujú v takej podobe, ktorá sľubuje, že môžu byť kontrolovateľne riešené bez neustáleho zmnožovania dogmatických, navzájom spolu nekomunikujúcich alebo sotva komunikujúcich teórií, a, po druhé, či zaujaté stanovisko naznačuje primerane jasný smer skúmania.

Zmysel normatívneho chápania matematiky nespočíva ani tak v pohľade späť, t. j. v neustálom vedení sporov s konkurenčnými prístupmi vo filozofii matematiky, ale predovšetkým v pohľade dopredu, smerom k lepšiemu porozumeniu minulej i súčasnej *reálnej* matematike. Samozrejme, súčasťou toho je aj upozorňovanie na deformácie a slepé uličky, ktoré majú na svedomí objektovo orientované filozofické koncepcie matematiky. Ale okrem toho pred nás fenomén matematiky stavia mnoho iných zaujímavých otázok, ktoré sú buď na pomedzí matematického a filozofického spôsobu uvažovania, alebo ktoré už jednoznačne vybočujú z rámca a kompetencie matematiky ako špeciálnej vednej disciplíny. Či filozofia má čo povedať k týmto otázkach alebo či v budúcnosti bude mať niečo relevantné, čím by k nim mohla prispieť, to nie je vopred isté, ale bude to záležať od konkrétnych filozofov. Jedným predpokladom k tomu je však vyhýbanie sa uzatvoreniu do vnútrofilozofických diskusií, ktoré sú odpojené od reálnych matematických činností. Chcem teda tento text ukončiť tým, že uvediem dva krátke (veľmi selektívne) zoznamy otázok. Otázky, ktoré sú na tom prvom, majú podľa mojej skúsenosti tendenciu viesť (*vo svojej nezreformovanej podobe*) do filozofických labyrintov, zatiaľ čo otázky z druhého majú potenciu viesť k produktívnemu prelínaniu sa filozofie s matematikou a dejinami matematického myslenia.

„Zlé" filozofické otázky:

O čom je matematika? – Existujú matematické objekty? – Aký je ontologický status matematických objektov? – Ako môže konečná bytosť poznávať matematické nekonečná? – Objavujeme matematiku alebo ju vytvárame?

„Dobré" filozofické otázky:

Prečo prijímame dané matematické pravidlo (vetu)? – Ako vzniká nová matematika? – Prečo by sme mali zaviesť nové axiómy v danej oblasti? – Akú úlohu zohráva matematika v našich úspešných empirických teóriách? – Ktoré smery a typy matematického výskumu by sme mali podporovať (uprednostňovať pred inými)

Literatúra

Benacerraf, P. (1973): Mathematical Truth. *The Journal of Philosophy*, LXX, 19, 661-679.

Brown, J. R. (1999): *Philosophy of Mathematics. An Introduction to the World of Proofs and Pictures*. London/New York: Routledge.

Dawson, R. (2015): *Leaving Mathematics As It Is: Wittgenstein's Later Philosophy of Mathematics*. PhD Thesis. University of East Anglia, School of Philosophy.

Fogelin, R. J. (2009): *Taking Wittgenstein at His Word*. Princeton: Princeton University Press.

Friederich, S. (2011): Motivating Wittgenstein's perspective on mathematical sentences as norms. *Philosophia Mathematica* 19 (1): 1-19.

Garavaso, P. (1991): Anti-Realism and Objectivity in Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. *Philosophica* 48, 2, 93-106.

Gerrard, S. (1991): Wittgenstein's Philosophies of Mathematics. In: *Synthese* 87, 1, 125-142.

Hardy, G. H. (1940): *A Mathematician's Apology*. Cambridge: Cambridge University Press 2012.

Mühlhölzer, F. (2010): *Braucht die Mathematik eine Grundlage?* Frankfurt am Main: Vittorio Klostermann.

Panza, M., Sereni, A. (2013): *Plato's Problem. An Introduction to Mathematical Platonism*. New York: Palgrave Macmillan.

Ramharter, E., Weiberg, A. (2006): *Die Härte des logischen Muß. Wittgensteins Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Berlin: Parerga.

Schroeder, S. (2014): Mathematical Propositions as Rules of Grammar. *Grazer Philosophische Studien*, 89, 21-36.

Shanker, S. (1987): *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*. London: Croom Helm.

Steiner, M. (1996): Wittgenstein: Mathematics, Regularities, and Rules. In: *Benacerraf and his Critics*. Cambridge, Mass.: Blackwell, 190-212.

Velleman, D., George, A. (2002): *Philosophies of mathematics*. Oxford: Blackwell Publishers.

Wittgenstein, L. (1956/1984): *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Sinzheim: Suhrkamp.

Wittgenstein, L. (1976): *Lectures on the Foundations of Mathematics*. Hassocks: The Harvester Press. LTD.

Tento príspevok vznikol ako súčasť riešenia grantového projektu VEGA 1/0258/19.

Mgr. Róbert Maco, PhD.
Katedra filozofie a dejín filozofie
Univerzita Komenského v Bratislave
Filozofická fakulta
Šafárikovo námestie 6
811 02 Bratislava 1
robert.maco@uniba.sk